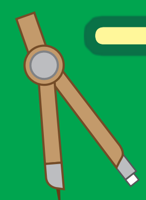
数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎



コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第107回 定規を使わないコンパスだけでの作図

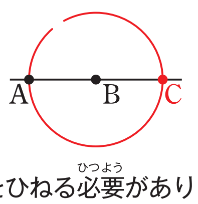
過去の記事の目次はこちらから
https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/

今回は、定規を使わないコンパスだけを用いた作図について考えます。

コンパスだけでの作図って？

まず、「定規を使わないコンパスだけを用いた作図」とはどういうことかを経験してもらいましょう。例えば、線分ABが与えられているとき、線分ABのBの方への延長線上に、AC＝2ABとなるような点Cを描くのは、定規が使えるなら簡単です。

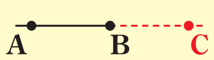
2点A、Bを通る直線を定規で描き、点Bを中心とし半径ABの円Bを描き、直線ABと円Bの2つの交点のうちAではない方をCとすればよいだけです。



でも、この作図で、定規が使えず、コンパスだけで点Cを作図しないといけないとなったらどうでしょう。少し、頭をひねる必要がありますね。問題とするので、さっそく考えてみましょう。

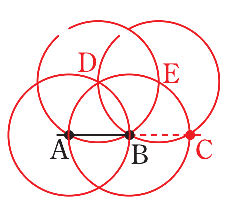
問題 1

線分ABが与えられているとき、線分ABのBの方への延長線上に、AC＝2ABとなるような点Cを、定規は使わず、コンパスだけを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

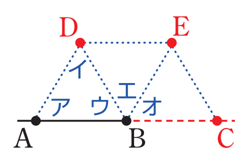


考え方 正三角形がカギになります。

描き方 点Aを中心とし、半径ABの円Aと、点Bを中心とし、半径ABの円Bを描き、円Aと円Bの2つの交点のうち1つをDとする。点Dを中心とし、半径BD（＝AB＝AD）の円Dを描き、円Dと円Bの2つの交点のうちのAではない方をEとする。点Eを中心とし、半径BE（＝BD＝DE）の円Eを描き、円Eと円Bの2つの交点のうちのDではない方をCとすると、このCが求める点になります。



証明 図のように、角をア、イ、ウ、エ、オとおきます。図の描き方から、AB＝AD＝BD＝DE＝BE＝BC＝CE…①です。「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、AB＝AD（①）より、角イ＝角ウ…②です。同様に、角ア＝角イ…③なので、②③より、角ア＝角イ＝角ウ…④です。「三角形の内角の和は180度である」ことから、角ア＋角イ＋角ウ＝180度…⑤です。④⑤より、角ウ＋角ウ＋角ウ＝180度なので、角ウ＝180度÷3＝60度…⑥です。同様にして、角エ＝角オ＝60度…⑦です。⑥⑦より、角ウ＋角エ＋角オ＝180度なので、「BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある」ことから、点Cは線分ABの延長線上にある…⑧とわかります。



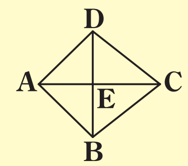
AB＝BC（①）より、AC＝2AB…⑨なので、⑧⑨より、正しく図が描けているとわかりました。

凧型の四角形の性質

チャレンジ問題のために、以下の問題を考えておきます。

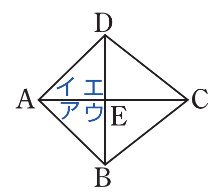
問題 2

AB＝AD、BC＝DCの四角形ABCDにおいて、ACが線分BDの垂直二等分線（対角線の交点EはBDの中点、ACとBDは垂直）であることを証明してみましょう。



考え方 BE＝DEを示すには、2つの三角形がぴったり重なることが利用できそうです。

証明 図のように、角をア、イ、ウ、エとおきます。問題の前提から、AB＝AD…①、BC＝DC…②です。△ABCと△ADCにおいて、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①②とACは共通より、△ABCと△ADCはぴったり重なります。よって、角ア＝角イ…③です。△ABEと△ADEにおいて、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」ことから、①③とAEは共通より、△ABEと△ADEはぴったり重なります。よって、BE＝DE…④、角ウ＝角エ…⑤です。⑤より、ACとBDは垂直…⑥なので、④⑥より、ACは線分BDの垂直二等分線であることがわかりました。

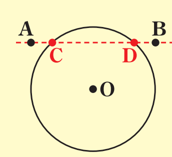


定規を使わないコンパスだけでの作図

それでは、今回のチャレンジ問題に取り組んでみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

右の図のように、点Oと点Oを中心とする円O、直線ABが円Oと2点で交わるような、円Oの円周上にない2点A、Bが与えられています（直線ABは中心Oを通らないとします）。このとき、直線ABと円Oの2つの交点C、Dを、定規は使わず、コンパスだけを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方 **問題 2** がヒントになります。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分であり、共通の弧に対する円周角は等しい。
- 円の直径を一辺とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。
- 円に内接する四角形において、向かい合う二角の和は180度であり、1つの内角とその向かい合う内角に対する外角は等しい。
- 円の接線と弦のなす角は、その弦を見込む円周角と等しい。

図1　対頂角

図2　錯角

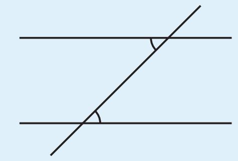
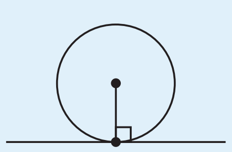


図3　円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。