数学の世界をのぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

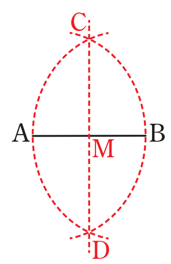
第106回 ある条件をみたす直線の作図

過去の記事の目次はこちらから
https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/

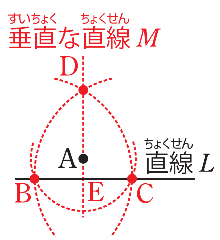
今回は、ある条件をみたす直線の作図について考えます。

作図法の確認

まず、中点の描き方を確認しておきます。線分ABがあたえられているとき、点Aを中心とし半径ABの円と点Bを中心とし半径ABの円を描き、その2円の交点をC、Dとします。このとき、2点C、Dを通る直線を描けば、ABとCDの交点Mが線分ABの中点になっています。証明を知りたい人は、第4回（2016年4月27日付）の記事を見てください。



次に、直線LとL上にない点Aがあたえられているとき、Aを通りLと垂直な直線Mの描き方です。点Aを中心とする円を1つ描き、その円とLとの交点をB、Cとします。点Bを中心とする半径BCの円と点Cを中心とする半径BCの円を描き、それら2円の交点のうちの1つをDとします。そして、2点AとDを通る直線を描けば、その直線がAを通りLと垂直な直線Mになります。証明は、△ABDと△ACDがぴったり重なることを示して、直線ADと直線Lの交点をEとして、△BDEと△CDEがぴったり重なることを示せば、このことから垂直であるとわかります。

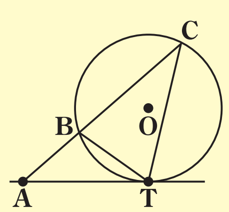


接線の性質と接線の描き方

チャレンジ問題のために、以下の問題を考えておきましょう。

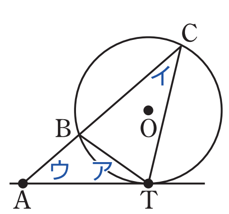
問題1

中心Oの円Oに対し、円周上の点Tにおける接線を引き、その接線上に点Aをとります。点Aを通り円Oと2点で交わる直線を引き、その2交点をAに近い方からB、Cとおくとき、AB×AC＝AT×ATであることを証明してみましょう。



考え方 長さの掛け算の式は、比の式に直して考えましょう。

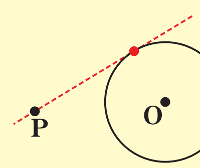
証明 図のように、角をア、イ、ウとおきます。



△ABTと△ATCにおいて、直線ATが円Oの接線なので、「円の接線と弦のなす角は、その弦を見込む円周角と等しい」ことから、角ア＝角イ…①です。また、角ウは共通…②です。よって、「二角が等しい三角形は相似である」ことから、①②より、△ABTと△ATCは相似であることが証明できました。したがって、相似の対応辺の比を考えて、AB：AT＝AT：ACです。よって、AB÷AT＝AT÷ACなので、AB×AC＝AT×ATが証明できました。

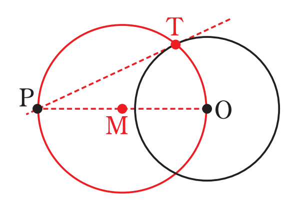
問題2

ある点Oを中心とする円Oと円外の点Pがあたえられているとき、点Pを通る円Oの接線を1つ、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

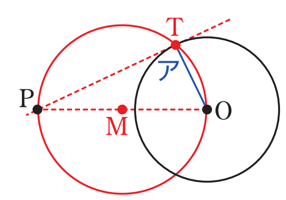


考え方 接線であることを説明する根拠となる原理は……。

描き方 まず、本文の記事のように、線分OPの中点Mを描き、Mを中心とし半径OM（＝PM）の円Mを描きます。円Mと円Oの2交点のうちの1つをTとすると、2点P、Tを結ぶ直線PTは円Oの接線です。



証明 図のように角アをおきます。図の描き方から、OPは円Mの直径なので、「円の直径を一辺とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である」ことから、角ア＝90°…①です。「ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である」ことから、①より、直線PTは円Oの接線です。したがって、図の描き方が正しいことがわかりました。

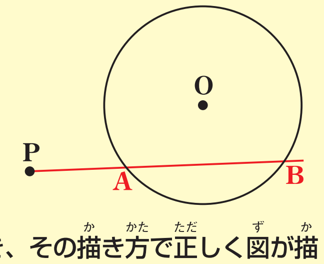


ある条件をみたす直線の作図

それでは、今回のチャレンジ問題に取り組んでみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

右の図のように中心Oの円Oと円外の点Pが、OPの長さが円Oの直径より短くなるようにあたえられています。この図において、点Pを通り、円Oと2交点A、Bをもつ直線を1つ、PA×PB＝AB×ABとなるように、定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方 **問題1**と**問題2**がヒントになります。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

〈根本原理〉

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい（図1）。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい（図2）。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である（図3）。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分であり、共通の弧に対する円周角は等しい。
- 円の直径を一辺とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。
- 円に内接する四角形において、向かい合う二角の和は180度であり、1つの内角とその向かい合う内角に対する外角は等しい。
- 円の接線と弦のなす角は、その弦を見込む円周角と等しい。

図1 対頂角

図2 錯角

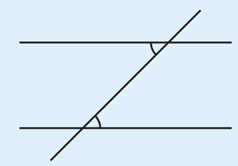
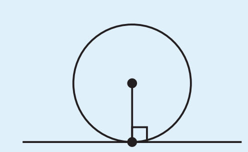


図3 円の接線



〈図を描くときの注意〉

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。