

数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第102回

ある条件をみたす点の作図5



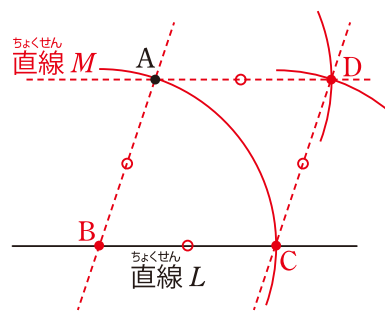
過去の記事の目次はこちら

<https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/>

今回も、ある条件をみたす点の作図について考えます。

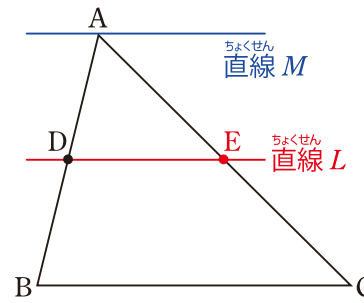
平行線の作図法の確認

平行線の描き方を確認してみましょう。直線LとL'上にない点Aがあたえられているとき、点Aを通り直線Lと平行な直線Mをコンパスと定規を用いて描く方法の一つは、右の図のようにひし形ABCDを描くことでした。証明が知りたい人は、第34回（2018年10月18日付）の記事を見てください。



証明

図の描き方から、DEとBCは平行です。点Aを通りBCと平行な直線Mを引きます。よって、直線MとDEとBCは平行…①です。「3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい」ことから、①より、 $AD : DB = AE : EC$ です。



よって、 $AD : (AD + DB) = AE : (AE + EC)$ すなわち、 $AD : AB = AE : AC$ です。

したがって、 $AD : AE = AB : AC$ となっているので、正しく図が描けていることがわかりました。

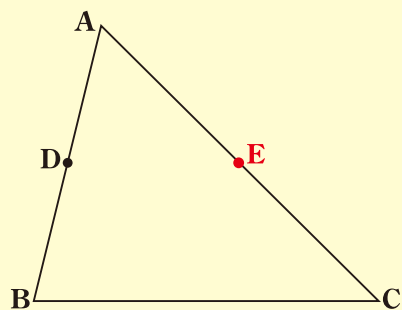
(※) DEとBCの平行から角が等しいことを証明し、「二角が互いに等しい三角形は相似である」ことから、 $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ が相似なことを証明するという方針でも説明できます。

線分比の条件をみたす点の作図

チャレンジ問題のために、次の問題を考えておきましょう。

問題1

$\triangle ABC$ の辺AB上に点Dがあたえられています。このとき、辺AC上に点Eを、 $AD : AE = AB : AC$ となるように、定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

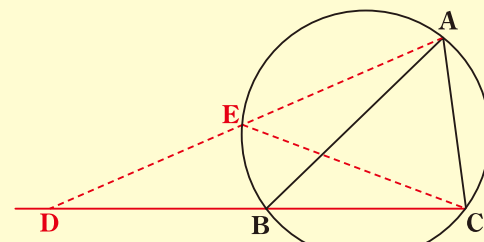


ある条件をみたす点の作図

それでは、今回のチャレンジ問題に取り組んでみましょう。がんばって考えてみてくださいね。

チャレンジ問題

下の図の $\triangle ABC$ とその3頂点を通る円があたえられています。この図において、辺BCのBの方への延長線上の点をD、線分ADと円の交点をEとすると、 $DE : CE = AC : BC$ となるように、定規とコンパスを用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



考え方

問題1の作図がヒントになります。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときを使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

(根本原理)

- 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい(図1)。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。
- 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。
- ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線であり、逆に、ある円の円周上の点を通る接線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直である(図3)。
- 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。
- ある弧に対する円周角は、その弧に対する中心角の半分であり、共通の弧に対する円周角は等しい。
- 円の直径を一边とし、円周上に3つ目の頂点がある三角形は、直径を斜辺とする直角三角形である。
- 円に内接する四角形において、向かい合う二角の和は180度であり、1つの内角とその向かい合う内角に対する外角は等しい。
- 円の接線と弦のなす角は、その弦を見込む円周角と等しい。

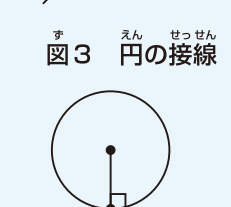
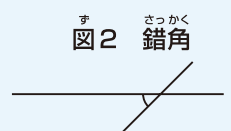


図1 対頂角

図2 錯角

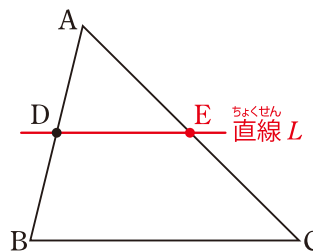
図3 円の接線

考え方

線分の比の式を導くためには、相似か平行線を利用することになります。

描き方

上に書いた作図法のように、点Dを通り辺BCと平行な直線Lを描きます。すると、直線Lと辺ACの交点Eが求める点になります。



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。