



コンパスと定規で描ける図形の世界



<https://www.seg.co.jp/blog-category/math-world/>

ユークリッド
幾何の世界

第2回 正しく作図ができたかどうかはどう説明する？



さて、第1回の記事で確認したので、コンパスで円を描くときに、「与えられたある点を中心とし、与えられた別の点を通る円を描く」だけでなく、「与えられたある点を中心とし、与えられたある線分の長さを半径とする円を描く」ことができるようになりました。読んでいない人は、第1回の記事を見てください。これでコンパスを普段通りに使うことができるようになったわけです。

そこで今回は、コンパスと定規を用いた作図を考えるときに、その作図法が正しいことをどんなふうに説明するのかについて、みなさんと一緒に考えていきたいと思えます。

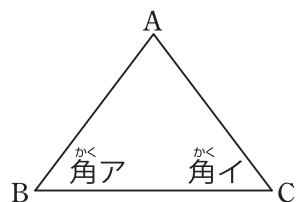
正しいことを説明するには？

問題の条件にあてはまる図を描くときに、どう作図するかは考えるけど、どうしてその作図で正しく図が描けているのかなんて考えたことないよ、という人も多いかもしれません。でも数学では、どうして正しいのかという説明自体も、とても大切なものなのです。

それでは数学で正しいということをごどのように説明するのかについてお話していきましょう。あることが正しいというためには、正しさの根拠になる根本的な原理・法則が必要になります。

つまり、『ある根本原理を理由として、長さが等しいとか、角度が等しいとか、そういった主張が導ける（正しいとわかる）』と考えます。

具体例をあげると、「ある三角形で2つの角が等しいことを説明したいときに、『二等辺三角形の底角は等しい』という根本原理があり、その三角形が二等辺三角形だと確認できれば、その三角形の底角にあたる2つの角が等しいことがわかる（導かれる）」というような説明です。このような、『ある根本原理があり、考えている図形がその根本原理の前提（仮定）をみたしているとき、その根本原理の結論の状況がその図形に対して導かれる』という説明を、数学では『証明』といいます。結局、作図の正しさの証明をするためには、必ず『根本原理』が必要だということになります。



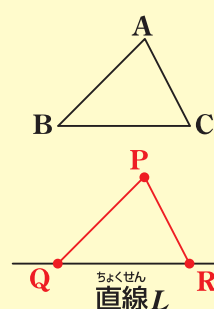
AB=ACがわかると、
そのことから、
角A=角Iが導ける

ぴったり重なる三角形を描いてみよう

では、作図の問題を考えながら、その作図が正しいことを証明するために、どんな『根本原理』が必要となるかを考えていくことにしましょう。まずは、作図の正しさの証明は抜きにして、作図（図形の描き方）だけを考えてもらいます。

問題1

三角形ABCと直線Lが与えられています。直線L上に1つの辺が重なっている三角形ABCと合同な三角形PQRを、コンパスと定規を使って1つ描いてみましょう。ここで合同とは、2つの三角形において、対応する辺の長さや角の大きさがすべて等しい（感覚的にはぴったり重なる）ということです。

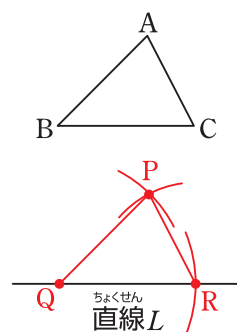


考え方

2つの三角形が合同（ぴったり重なる）とは、対応するすべての辺とすべての角が等しいということです。長さが等しいことに定規の目盛りは使えませんし、角度が等しいことに分度器も使えませんが、コンパスを使うと……。

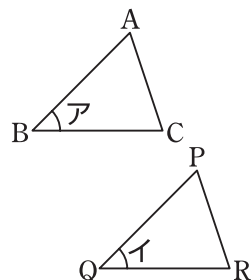
描き方

直線L上に点Qをとり、コンパスで、Qを中心とし半径BCの円Qを描きます。円Qと直線Lの2つの交点のうち、1つをRとします。Q、Rを中心とし半径AB、ACの円をそれぞれ描き、それら2円の2つの交点のうち1つをPとします。定規で、2点P、Q、2点P、R、を通る直線をそれぞれ描くと、求める三角形PQRが描けました。



証明の出発点になる根本原理

さて、問題1の作図が正しいことを証明するためにはどうすればよいでしょうか。作図された三角形PQRは、図の描き方から、三角形ABCと対応する三辺の長さが等しいことはわかっています。でも、合同な（ぴったり重なっている）ことを証明するために必要な、対応する3つの角が等しいことはわかっていません。とはいえ、説明の根拠になる根本原理がないと、対応する3つの角が等しいことは導けないわけです。この状況を何とかするためには、「三辺が互いに等しい2つの三角形は合同である（ぴったり重なる）」という主張を根本原理にするしかありません。



左の図で対応する三辺がそれぞれ等しく、 $AB = PQ$ 、 $BC = QR$ 、 $CA = RP$ であれば、AとP、BとQ、CとRを重ねることで、 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ が合同になります。すると、例えば、角Aと角Iも、ぴったり重なるので等しくなります。

この原理があると、ある三角形が与えられているとき、コンパスでその三角形と三辺の長さが等しい三角形を描けば、2つの三角形が合同になることが導けるので、三角形がぴったり重なっていることから、三角形の対応する角が等しいことも導くことができます。

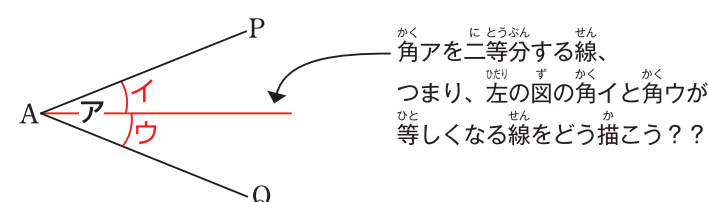
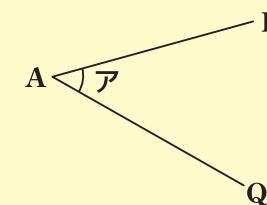
根本原理を用いた作図の正しさの証明

以上をふまえると、問題1の作図の正しさの証明は、『図の描き方から、 $AB = PQ$ …①、 $BC = QR$ …②、 $CA = RP$ …③です。 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ において、「三辺が互いに等しい2つの三角形は合同である」ことから、①②③より、 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ は合同です。よって、作図が正しいことが証明できました』となります。

それでは最後に、以下の問題を考えてもらいます。図の描き方と、その描き方で正しい図が描けていることの証明を考えてみてください。

チャレンジ問題

右の図の角Aを二等分する直線を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。



2つの角が等しいことは、それぞれの角を含む2つの三角形が、ぴったり重なる（合同である）ことで確かめられます。そして、2つの三角形が合同であることは、2つの三角形の三辺が互いに等しいことで確かめられるのでした。このことをどう利用するのか。それが、この問題を解決する鍵になります。

証明のための根本原理と図を描くときの注意

（図を描くときの注意）
定規は目盛がないものとします。直線を引きこと以外には使えません。

（根本原理）
定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
三辺が互いに等しい三角形は合同である（ぴったり重なる）。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。