SEG®
中１数学
授業見学
レポート

中学入学前の春期講習で文字を使った計算に挑戦！

中学に入ると「算数」が「数学」に変わる。文字を使った計算が入ってきて、どんな数でも成り立つ法則（公式・定理）へと踏み込んでいく。数学専門塾として有名なSEGであるが、その授業は「具体的な数で実験する」ことからスタートする。「成り立つことが予想される関係を文字で表現し、それを証明する」という方法で法則を確実に理解させていくというものだ。そんな授業の一端を紹介する。

文字で表された数の大小を比較する

今回レポートする授業は、3月に実施された新中1の春期講習だ。新中1とは、この3月に小学校を卒業し、4月に中学生になる学年である。5日間の講習のなかで、発見した数についての法則を文字式で一般的に表現し、それが成り立つ理由を文字式の計算を利用して説明することを学ぶ。3日目の本日は、その中でも数の大小の評価を扱う。

授業を担当する小林純先生は、まず数の大小を表す記号（不等号）について確認したうえで問題に入る。

> 問 3.1
> $\frac{3}{3n+4}$ と $\frac{1}{n+1}$ のどちらが大きいかを説明せよ。

「文字が入っているので、一見しただけではどちらの数が大きいのか分かりません。具体的な数で実験してみましょう」と言いながら黒板に表を描き、生徒に具体的な数を入れた数字を答えさせながら、大小を比較していく。「まず、$\frac{3}{3n+4}$のnに1を代入すると？」「$\frac{3}{7}$」「では$\frac{1}{n+1}$のnに1を代入すると？」「$\frac{1}{2}$」「では、$\frac{3}{7}$と$\frac{1}{2}$でどちらが大きいか比較するには、どうしたらいいですか？」「通分する」「では通分すると？」「$\frac{6}{14}$と$\frac{7}{14}$」「そうですね。ですから、$\frac{1}{2}$の方が大きいということですね」。

同様に、nに2を代入した場合も、$\frac{3}{3n+4}=\frac{3}{10}$より$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{3}$の方が大きいことを生徒と一緒に考えながら示していく。その次はいきなり、1000を代入した場合である。「$\frac{3}{3004}$と$\frac{1}{1001}$を比較するわけですが、通分するのに分母の3004×1001をそれ以上計算する必要はありません」と言いながら、それぞれ$\frac{3\times1001}{3004\times1001}$と$\frac{1\times3004}{3004\times1001}$となることを板書し、分子の3003と3004を比較して$\frac{1}{1001}$の方が大きいことを示した。

「どうやら$\frac{3}{3n+4}<\frac{1}{n+1}$と予想できそうですね。ではそのことを説明していきましょう」と式を変形していく。

分母をそろえると、

$$\frac{3}{3n+4}=\frac{3\times(n+1)}{(3n+4)\times(n+1)}=\frac{3n+3}{(3n+4)\times(n+1)}$$

$$\frac{1}{n+1}=\frac{3n+4}{(3n+4)\times(n+1)}$$

となり、分子について

3n+3<3n+4 だから、$\frac{3}{3n+4}<\frac{1}{n+1}$となる。

実は、1000を代入したときに、「分子をそろえて比較すればいい」と言った生徒がいた。そこで小林先生は、その方法でも具体的な数を使った表を描いて実験してから$\frac{1}{n+1}$を$\frac{3}{3n+3}$に変形し、「分子が同じなら、分母が小さい方が数として大きいから」と、$\frac{3}{3n+4}<\frac{3}{3n+3}$つまり$\frac{3}{3n+4}<\frac{1}{n+1}$となることを示した。

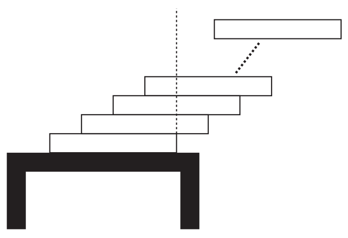
続いて「分子が同じなら、分母が大きい方が数として小さいことを一般的に法則として示すにはどうしたらいいですか？ 書いてみてください」と先生。数学法則を文字を使って表現する方法を考えさせるわけだ。机を回りながら、生徒一人ひとりのノートを見てはアドバイスしていく。しばらくしてから、ある生徒を指名して、一般的に使える法則を答えさせた。

「a<bのとき、$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$」「そうですね。これなら一般的に使えそうですね。今日は、この法則を何回も使うことになります」と、この問題を切り上げた。

積み木をずらして積み上げどこまでずらせるかを予想

次は問3.2ではなく、いきなりチャレンジ問題に入っていく。チャレンジ問題というのは、基本的に授業では扱わず、解答も配布しないが、自主的に解いてきた人には先生が個別に対応してくれるというSEG独自のもので、当然ながらハイレベルな問題だ。内容によっては宿題にしたり、授業中に扱う場合もある。今回は後者のようだ。

> チャレンジ問題（どこまでずれるかな？）
> まったく同じ形の積み木を一方向にずらしながら積み上げる。一番下の積み木の右端に対して、一番上の積み木の右端をどこまでずらすことが可能だろうか。



「まずは自分で実験してもらいましょう」と積み木を10数個ずつ生徒に配ると、どの生徒も真剣になってどこまでずらせるかを確かめ始める。先生は、生徒が積み木を積んでいく様子を見て回りながら、大体の生徒が試し終えたところで質問していく。

「ずらせるのは、積み木の長さの半分未満だと思う人？」誰も手をあげない。「半分以上1倍未満だと思う人？」今度は12人の手があがる。「1倍以上2倍未満」が1人、「2倍以上3倍未満」が0人、「3倍以上」が2人だった。3倍以上と答えた生徒に「何倍くらいいけると思う？」と問うと、「無限！」。他の生徒から「マジで？」と声が上がる。

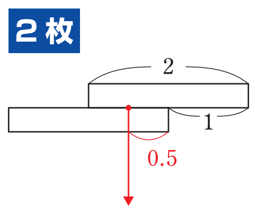
ここから生徒とのやり取りを通じて、核心にせまっていく。「では2枚目はギリギリどこまでずらせますか？」

「半分まで！」「分かりやすく積み木の長さを2としましょう。そうすると、1までずらせますね。じゃあ3枚だったら？」。答えにつまってしまった。しかしどの生徒も、頭をフル回転させているのが見ていてよく分かる。すると、ある生徒が手をあげ「2枚のギリギリに積んだ積み木をひとかたまりと見て、その重心を3枚目の端にくるようにする」と答える。先生は大きくうなずき、「なるほど。じゃあ、上の2枚をひとかたまりにしたときの、釣り合いの位置はどこ？」「右端から0.5！」

この発想力には驚いた。3枚目は上に積むのではなく、どんどん下に重ねていくというイメージなのだ。「だったら、4枚目は3枚をひとかたまりとして考えて釣り合うところにセットするわけだね。どこだろう？」「右から3分の1のところ」「なぜ？」「上2枚の重心が3枚目の右端にかかっていて、3枚目の重心は積み木の真ん中にあるから」。

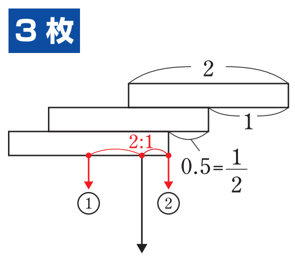
「みんな分かった？」先生は全員の理解のために解説していく。「釣り合いの位置を天秤で考えると、3枚目（一番下）の積み木の右端に2枚分の重さ、中央に1枚分の重さがかかっている。その長さの比は分かる？」「2対1」「その通り。積み木の長さが2で、半分の長さを2対1に分ける点。ではずらす長さは？」「3分の1」

２枚



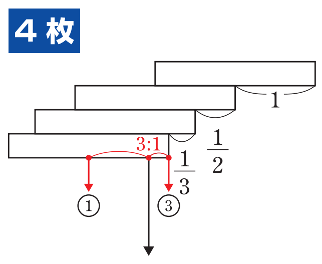
ここが釣り合う位置
ここに3枚目の端をセット

３枚



ここが釣り合う位置
ここに4枚目の端をセット

４枚



3:1に分ける点

どの生徒も目が輝き出す。法則性が見えてきたからだ。先生は「ずらす長さが、上から 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$……となっていきますから……」と、次のように板書する。

積み木が n+1 枚のとき、

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

だけずらせることが分かる。

積み木は無限にずらせることを証明

では、このSがどれだけ大きくなるのか。それを証明していくのが、問3.2なのだ。そこにつなげていくために、あえて体験を通して積み木のチャレンジ問題に挑ませたのだろう。

紙面の関係で、ここからは細かな計算は省いて、流れだけを紹介する。もちろん、ここでも生徒に質問して答えさせたり、ヒントを与えて考え方を引き出したりしながら進めていく。そして、その過程で先生は、先ほどの『分子が同じ（この場合は1）なら分母が大きいほど数が小さい』という法則を使うことを、くり返し強調していた。まず$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{24}>\frac{4}{2}$を確認した後、

$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$により、

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{8}>\frac{5}{2}$を示した。

さらに同様にして$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}>\frac{6}{2}$を示し、これらを一般化して、$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{k+2}{2}$を得た。

「ここでkを大きくすると$\frac{k+2}{2}$はどこまでも大きくなり、それより大きい$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^k}$もいくらでも大きくなります。結果的に$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$もいくらでも大きくなるわけです。先ほど積み木がどこまでもずらせると答えた人が正解で、これでその証明ができたことになります」とまとめた。

「でも、無限にずらせるって、ちょっと信じがたいですね」「その前に天井を突き破るよ」「そうですね」などと雑談もはさみながら、次の問題に移っていく。

以後も、SEGならではのエッセンスが詰まった問題が続く。ここも要点だけ紹介すれば、分子が1で分母が自然数の分数を「単位分数」といい、どんな分数$\frac{b}{a}$（a,bは自然数）も、異なる単位分数の和で表されることを証明していくという流れになる。ただ、少し時間が足りなかったため、最後の問題は「明日じっくりやりますから、残りは家で考えてきてください」と授業を終えた。

くり返しになるが、授業を受けている生徒は、厳密にはまだ中学生ではない。中学校でこれから文字式を習おうという前に、数学における文字の概念（がいねん）から文字式の変形の仕方、一見しただけでは大小が分からない数の評価、そして証明の書き方などを、丁寧に教わったわけだ。

休けいをはさみながら3時間という長い授業時間が設定されているからこそ、その日のテーマをじっくり学べるのだろう。改めてSEGの底力を感じることができる授業であった。

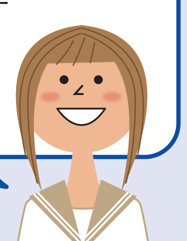
SEG® 中１数学

受講生の声

中学受験を終え、中学からはじまる「数学」の授業を楽しみにしているみなさんは、なぜSEGで数学の春期講習を受けようと思ったのでしょうか。実際の授業の魅力についてもうかがいました。

暗記させるのではなく考えさせるSEGの授業は楽しい

答が大事な算数と違って過程を大切にするという数学の考え方に初めて触れましたが、解き方を暗記させるのではなく、どうしてそうなるかの理屈を教え、生徒自らに考えさせるSEGの授業はとても楽しいです。SEGでは、一つの問題から一つのことを教えるのではなく、少しずつ見方を変えてたくさんのことを教えてくれるのだなと思いました。今回積み木を使って教わりましたが、文字や図だけの問題をより具体的にイメージできるようになり、より深い理解につながったと思います。算数はもともと好きだったのですが、数学もさらに好きになれました。



◆A.O. さん（桜蔭）

一つの問題についてじっくり考えられるのが良い

親に勧められ、面白そうと思ったので数学の春期講習を受講しました。初めての「数学」の授業で少し緊張していましたが、算数との違いについて先生が丁寧に説明してくださったので、とまどうことなく納得して授業に入ることができました。問題をたくさん解かせて覚えさせる授業が普通だと思っていましたが、SEGでは一つの問題について時間をかけてじっくり教えてくれます。それが自分には合っているし、楽しいと思えるポイントです。先生の解説も分かりやすくてユーモアがあり面白いので、よりいっそうきちんと話を聞こうと思えるのが良かったです。

◆N.A. さん（私）武蔵