SEG 中２数学 授業見学レポート

中２になる直前の春休み 東大の入試問題に挑戦！

円周率が 3.14……であることは小学生でも知っている。でも、それが何を意味する数なのか、どのようにその数を導き出すのかを説明できる人は、大人でも少ないのではないだろうか。数学専門塾としてスタートしたSEGでは「円周率とは何か」から解説し、中１までに習った知識を使って、円周率に関する実際の東大入試問題を解いていく。そんなダイナミックな授業を味わっていただきたい。

小学校の授業の大切さを改めて認識させる導入部

今回紹介するのは新中２の春期講習だ。講習は全部で５日間あり、平方根とルートの定義、ルートの計算法則、ピタゴラスの定理などを４日目までに学んだうえで、最終日の５日目である本日のテーマは、何と「東大入試に挑戦」である。以下の１問を３時間かけて考えていこうというわけだ。

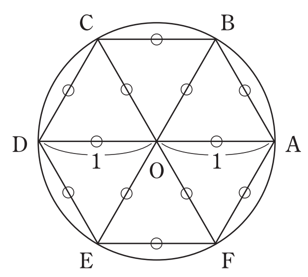
> 問 5.1
> （1）円周率πは、3.05 より大きいことを証明せよ。（東京大学・2003 年理系第６問）
> （2）円周率πの値にどこまで近づけるか挑戦してみよう。

授業を担当する佐藤太郎先生は、「今日の最終目標は(2)ですが、いきなり 3.141592……に近づくのは無理ですから、手頃な問題として、20年ほど前の東大の入試問題(1)から解いていくことにします。この講習で習った平方根やピタゴラスの定理を使うことで証明できてしまいます」と授業をスタートさせた。

続いて、「円周率とは何か、説明できる人はいますか？」と生徒に問いかける。何人かの生徒が手を上げ、その中の１人が「円の直径に対する円周の比率」と答える。「そうですね。では、小学校のときに円周率が３より大きいことは習っているはずですが、その求め方を覚えている人はいますか？」と生徒を見渡す。

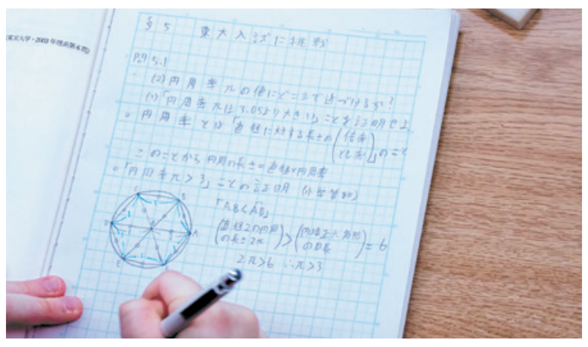
「小学校の算数の中でもとても大事なことの一つですから、必ず習います。数学の問題は、習ったことを組み合わせて解いていくので、小学校からきちんと勉強してきた人でないと、この問題は解けないことになります。説明できる人はいますか？」と再度問いかける。すると1人の生徒が「確か、正六角形を使って……」と言いかけるが途中で止まってしまう。すかさず先生は「そうだよね、内接する正六角形を使って説明できますね」とフォローし、図Ａを描いていく。

図 A



生徒を指名して答えさせながら、正六角形が６つの正三角形でできていること、円の直径を２とすると内接する正六角形の周長が６であること、２つの点を結ぶ線分の長さが最短距離だから、円周は６より大きいことを確認していき、最後に以下のように板書した。

円周率$\pi>3$の証明（小学算数）
図より、
（直径２の円周の長さ）＞（内接正六角形の周長）
$2\pi>6$　　$\therefore \pi>3$



正八角形を使うことで東大の入試問題を解く

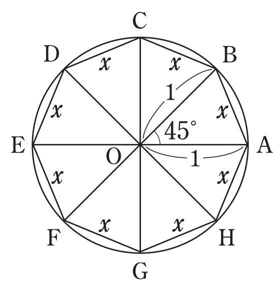
ここまで進んだところである生徒が「じゃあ、正六角形よりもっと円周に近い多角形にしていけばいいのか……」とつぶやく。それを先生はきちんと拾い、「お、良いこと言うね。内接する多角形の周長と円周を比較する方法なら、できるだけ多くの点が円に接する多角形の方が良いわけですね。ここまでは理解できたという人は？」全員の手が上がる。みんなしっかりと理解できているようだ。

さて、ここで(1)の東大の問題を確認しよう。3.05より大きいことを示すわけだから、半径を１とする円を考えると、

円周の長さ $2\pi>$ 正多角形の周長 $l>2\times3.05$（$=6.1$）

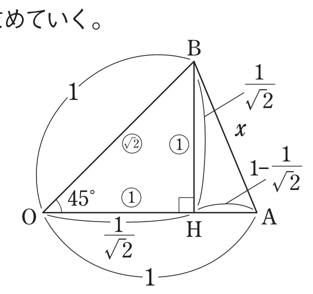
つまり、$l>6.1$ を示せばいいことが分かる。先生は「まずは正八角形でやってみましょう」と円に内接する正八角形（図Ｂ）を描いていく。

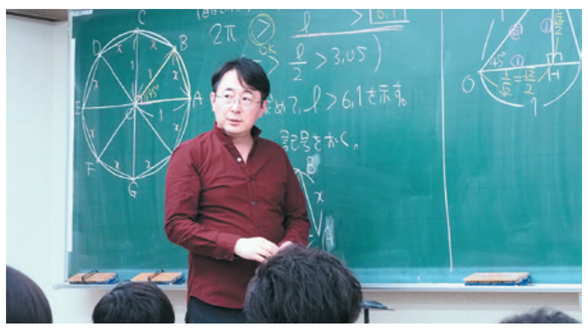
図 B



「この図から周長 $l=8x$が分かりますね。ではこのxはどうやって求めるかというと、一つの三角形だけを考えれば良いです」と続けて図Ｃを描き、生徒に質問しながら、xを求めていく。

図 C





「さて、どうしたらいいですか？」「B からOAに垂線を引く」「そうですね、すると∠BOH＝45°だから△BOHは……」「直角二等辺三角形」「そうなると、辺の長さには何か特別な関係がありましたね」「$1:1:\sqrt{2}$」「すると OB＝1 だから、OH と BH の長さはともに……」「$\frac{1}{\sqrt{2}}$」「分母を有理化すると？」「$\frac{\sqrt{2}}{2}$」「それが分かると x の長さも求められますね」……こんなふうに、先生と生徒が会話しながら、一緒にピタゴラスの定理を使ってxを求める式を立てていく。

$$\angle BHA=90^\circ より、x^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

計算は省くが、これを計算すると$x=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ となり、正八角形の周長 l は x の８倍だから、$8\sqrt{2-\sqrt{2}}>6.1$ を示せばいいことになる。

「二重根号が出てきましたね。どうすればいいでしょう？」「両辺を二乗する」こうした会話を続けながら、生徒とともに核心へと迫っていく。詳細な計算は省略するが、両辺を二乗した後、この式を変形していくと、結局は、$\frac{9079}{6400}>\sqrt{2}$ を示せばいいことが分かる。

ここで先生は、ある工夫を提示する。「左辺を筆算で計算すると、1.418……ですが、もし$\sqrt{2}=1.414$……を知っていたとすれば、1.415 という数は、$\frac{9079}{6400}$ よりも小さく$\sqrt{2}$よりも大きいはずですから、$1.415>\sqrt{2}$ を示すことができればいいということになります」

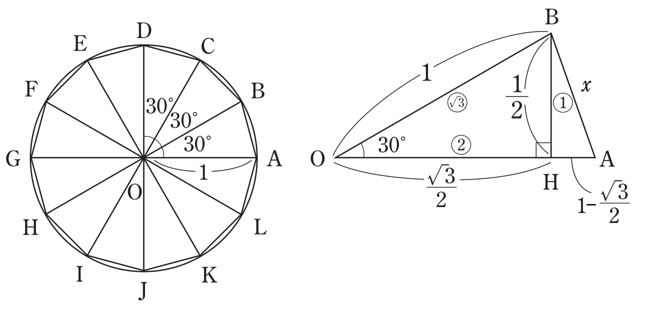
$1.415=\frac{141.5}{100}=\frac{283}{200}$ と変形し、二乗すると $\frac{80089}{40000}$。$\sqrt{2}$ の二乗は２であり、$2=\frac{80000}{40000}$ だから、$1.415>\sqrt{2}$ を示すことができ、このことから、πは3.05より大きいことを証明することができた。

こうして小学校の算数の振り返りから始まって、内接する正八角形を考え、その周長が6.1より大きいことを示して、円周率πが3.05より大きいことが論理的に証明できたわけだ。生徒たちは、中学数学の初歩的な知識だけで、東大の入試問題を解くことができるという得難い経験を積んだことになる。改めて、基礎の大切さと、論理的に組み立てていくことの大切さを学んだはずで、こうした授業こそがＳＥＧの真骨頂と言えるだろう。

正十二角形を考えることでさらに$\pi>3.1$を証明

残っている問題は(2)のできるだけ円周率πまで近づく挑戦だ。ここで、先生は内接する正十二角形を示し、同じようにそこから1つの三角形を図に示した（図Ｄ）。

図 D



進め方は、正八角形のときとまったく同じだ。正十二角形を構成する三角形の1つ△BOA を考え、Bから OA に垂線 BH を引くと、△BOH は 30°と 60°の角を持つ直角三角形になる。しかもこの三角形の辺の比も特別な関係になっており、$1:2:\sqrt{3}$ になっている。この比率から BO＝1 とすると、BH＝$\frac{1}{2}$、OH＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$ となり、△BHA の各辺に、ピタゴラスの定理を当てはめると、

$$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

が得られる。これを変形すると、$x=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ となり、正十二角形の周長$12\sqrt{2-\sqrt{3}}>6.2$ を示すことができれば、円周率πが3.1より大きいことを証明できる。つまり先ほどと同様に両辺を二乗して変形し、$\frac{6239}{3600}>\sqrt{3}$ を示せばいいことが分かる。

「左辺を計算すると、1.733……となりますが、もし$\sqrt{3}=1.732$……ということを知っていたとすれば、この方針で確実に証明できることになりますね」と先生。続けて「でも、$\frac{6239}{3600}$ を二乗するのは大変ですよね。これより小さな数で、$\sqrt{3}$ より大きくなるような数にしたいけれども、どこまで分子の数を減らせばよいでしょう？」と話しながら、6239÷3600 の筆算の過程を黒板に示して、分子を１ずつ減らしながら答が 1.732 以上になることを生徒と一緒に確認していく。分子を２つ減らした 6237に差しかかったところで「6237にするとなんかいい感じの数になるの、分かるかな？」と振り返って生徒に問いかけた。生徒たちは「？」という顔をしている。先生は一つひとつ導くように「6+2+3+7 はいくつ？」「18」「18 は何の倍数？」「9」「だったら９で割り切れますよね」と誘導していく。「あ、そうか」と納得する生徒たち。つまり、$\frac{6237}{3600}$ を ９ で約分した $\frac{693}{400}$ が$\sqrt{3}$ より大きいことを示せばいいことになる。計算すると、

$$\left(\frac{693}{400}\right)^2=\frac{480249}{160000}>\frac{480000}{160000}=3=(\sqrt{3})^2$$

となり、$\pi>3.1$ となることが証明できた。

「これをさらに倍にした正二十四角形、さらに正四十八角形、そして正九十六角形まで計算したのが古代ギリシャのアルキメデスさんで、2000年前に3.14よりもπに近い値を求めていたそうです」とのエピソードを紹介し、次のように締め括って授業を終えた。

「1日目に$\sqrt{2}$ がどのくらいの数かを調べるときにやったように、円周率を求めていくには、3.14 より大きいということだけでなく、例えば 3.15 より小さいということも説明しなければいけません。でも、今日やってきたことが身についていれば、この先、もっと別の円周率の求め方を扱うことになっても、きっと方針に気づけるようになると思います」

ここまで休けいをはさんで３時間。とても濃密な授業で、生徒たちは晴れやかな顔をしていた。

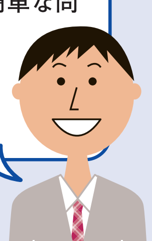
SEG中２数学

受講生の声

この授業を受けていたのは、４月から中２となる生徒たちです。中１からＳＥＧで数学の授業を受けてきて、どんな点を魅力に感じているのか聞いてみました。

解くのに必要な発想を考えるのが楽しい

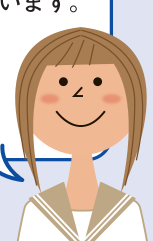
どの問題を解く場合も発想が必要で、それを考えるのが楽しいです。今日の授業なら、補助線を引くことで、前の授業で学んだピタゴラスの定理が応用できたりするところ。テキストには簡単な問題から難しい問題まで載っていて、自分に合った問題がある点も気に入っています。



◆E.K. さん（桐朋）

難しめの問題で数学の楽しさに気づける

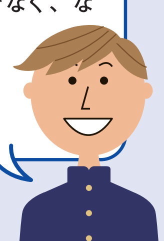
授業のなかで基礎的な問題をしっかり解説したうえで、チャレンジ問題など難しい問題に取り組めるところに魅力を感じています。自分でどんどん解いていくので、力もついていく気がしています。難しい問題に取り組むことで、数学の楽しさに気づかせてもらえる授業だと思います。



◆E.N. さん（桜蔭）

テーマを深掘りするので思考力が伸びる

ＳＥＧの数学の授業の良さは、テーマを深掘りする点だと思います。今日の授業で、円周率が3.05より大きいことを３時間かけて解説しているのもそうです。ただ解き方を教えてくれるだけでなく、なぜその定理が成り立つのかまで教えてくれるので、数学の思考力が伸びました。



◆R.K. さん（私）芝）

いろいろな方向から考える力が身につく

授業が単なる作業になっていない点が、ＳＥＧの一番の魅力だと思います。だから授業がつまらないと感じることなく、自分から積極的に参加できるのだと思います。分からない問題に対して、ああでもない、こうでもないと考えることで、いろいろな方向から考える力が身につきました。

◆R.N. さん（筑附）