

# 数学の世界をのぞいてみよう!

執筆・編集：佐藤 太郎

# コンパスと定規で描ける図形の世界

……ユークリッド幾何の世界……

第40回

## 中心角と円周角の関係

今回は、円の性質について考えてもらいます。

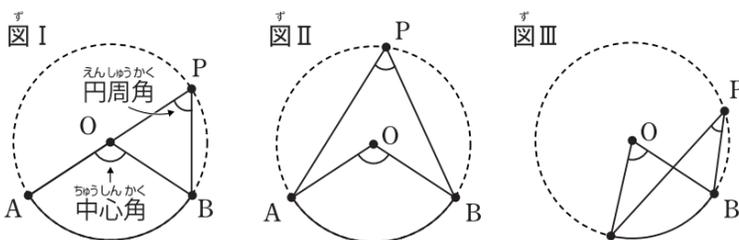
### 中心角と円周角

まず最初に、中心角と円周角について説明しておきます。円周上に2点A、Bが与えられているとき、点A、Bによって、円周は2つの曲線に分けられます。このとき、分けられたそれぞれの曲線を弧ABといいます。特に、半円周より短い方の弧を劣弧AB、半円周より長い方の弧を優弧ABともいいます。

そして、中心がOの円Oにおいて、半径OAと半径OBと弧ABによって囲まれる図形のことを、おうぎ形といいます。

さて、このおうぎ形OABのOAとOBのなす角を、「おうぎ形OABの中心角」や円Oにおける「弧ABの中心角」といいます。また、円Oの円周上に弧ABが定められているとき、弧AB以外の円周上の点Pに対して、弧ABが含まれるPAとPBの間の角を「弧ABの円周角」といいます。

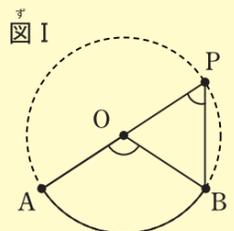
さて、この「弧ABの中心角」と「弧ABの円周角」との間には、「弧ABの円周角は弧ABの中心角の半分である」という関係が成り立ちます。今回は、このことの証明を目標にしましょう。点Pの位置によって、証明しなければならない図は、次の3つになります。



まずは、図Iの場合を考えてみることにしましょう。

#### 問題1

中心Oの円Oに対し、円周上に弧ABがあり、弧AB以外の円周上に点Pがあります。点A、O、Pが一直線上にある図IのPAとPBの間の角の場合に、「弧ABの円周角は弧ABの中心角の半分である」ことを証明してみましょう。



#### 考え方

円は中心からの距離が一定の点を集めてできる図形なので…。

#### 証明

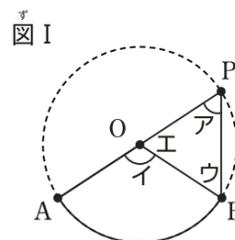
図のように、角をア、イ、ウ、エとおきます。

すると、円の半径よりOB=OPなので、「二等辺三角形の底角は等しい」ことから、角ア=角ウ…①です。

「三角形の内角の和は180度」より、角ア+角ウ=180度-角エ…②です。

「3点A、O、Pがこの順番で一直線上にあるならば、OAとOPのなす角は180度」より、角イ=180度-角エ…③です。

①②③より、角イ=角ア+角ウ=角ア+角ア、すなわち、角ア=角イ÷2なので、「弧ABの円周角は弧ABの中心角の半分である」ことが証明できました。



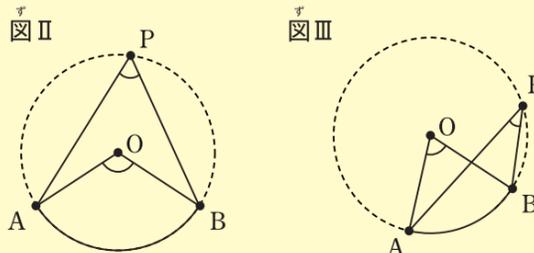
### 中心角と円周角の関係を証明しよう

それでは、今回のチャレンジ問題です。ここまでの記事をヒントに、がんばって考えてみてくださいね。

#### チャレンジ問題

中心Oの円Oに対し、円周上に弧ABがあり、弧AB以外の円周上に点Pがあります。

図IIと図IIIのそれぞれのPAとPBの間の角の場合に、「弧ABの円周角は弧ABの中心角の半分である」ことを証明してみましょう。



#### 考え方

問題1をヒントに考えてみましょう。

### 証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

#### 根本原理

- ・ 定規で、2点を通る直線が引ける。コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- ・ 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 一辺とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- ・ 斜辺と他の一辺が互いに等しい直角三角形はぴったり重なる。
- ・ 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。

- ・ 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。

- ・ 対頂角は等しい(図1)。
- ・ 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい(図2)。

- ・ 三角形の内角の和は180度、四角形の内角の和は360度である。

- ・ ある円の円周上の点を通る直線は、その点と中心を結ぶ半径と垂直であるならば接線である(図3)。

- ・ 平行四辺形の向かい合う辺は等しい。
- ・ 3本の平行線が平行線と交わる直線から切り取る2本の線分の長さの比は常に等しい。
- ・ 二辺の比とその間の角が互いに等しい三角形は相似である。
- ・ 二角が互いに等しい三角形は相似である。
- ・ 三辺の比が互いに等しい三角形は相似である。

#### 図を描くときの注意

- ・ 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

図1 対頂角

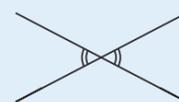


図2 錯角



図3 円の接線



チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。