

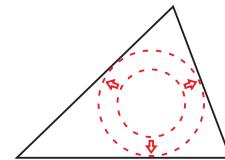


数学の世界 を ぞいてみよう！

執筆・編集：佐藤 太郎

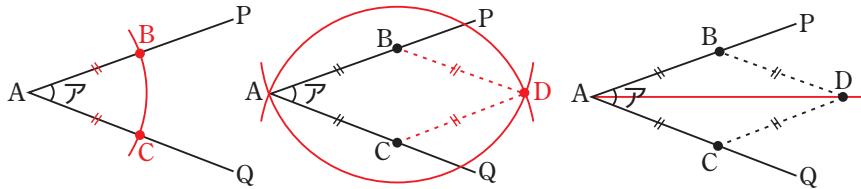
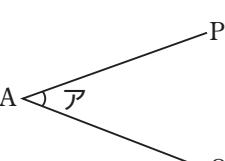
今回は、与えられた三角形からなるべく大きな円をとりだすための作図について考えていきます。その円は、三角形の内側で、円を大きくしていくとわかるように、三角形の三辺と内側から接している円になります。

そのような円は本当に描けるのでしょうか。その解明には、前回とりあげた直線が円と接するための条件「中心がOである円Oの円周上の点Tを通る直線は、半径OTと垂直であるならば接線である（円と直線が1点のみを共有する）」が大切な役割を果たします。

三角形のなかの
なるべく大きな円

角の二等分線を描いてみよう

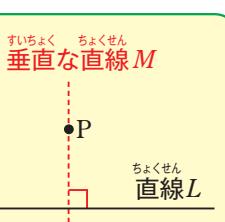
三角形の三辺と内側から接する円を描くための準備として、これまでの記事にも登場しましたが、まずは、角の二等分線の描き方をおさらいしておきましょう。右の図の角アを二等分する直線の描き方はいろいろありますが、1つの描き方は、角アを1つの内角とするひし形を描くものです。線分AP上に点Bをとり、コンパスで、Aを中心とする半径ABの円を描きます。そして、その円と線分AQ、または、AQのQの方への延長線との交点を、図のようにCとします。



次に、コンパスで、Bを中心とする半径BAの円とCを中心とする半径CAの円を描き、それら2つの円のAではない方の交点を、図のようにDとします。すると、直線ADが、角アの二等分線になります。証明が気になる人は、第2回(2月18日付)の記事を見てください。

ある点からある直線への垂線を描いてみよう

次に、ある直線Lとその直線上にない点Pが与えられているときに、点Pからその直線Lへの垂線を描いてみましょう。



問題 1

直線LとL上にない点Pが与えられているとき、その点Pを通りLと垂直な直線Mを、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

コンパスと定規で描ける図形の世界

ユークリッド幾何の世界

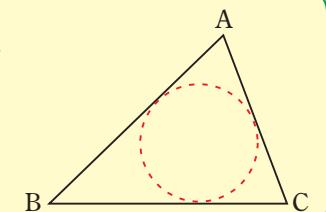
第13回

さん
か
け
い

三角形から、なるべく大きな円をとりだそう

チャレンジ問題

△ABCが与えられているとき、その三角形の三辺と内側から接している円を、コンパスと定規を用いて描き、その描き方で正しく図が描けていることを証明してみましょう。

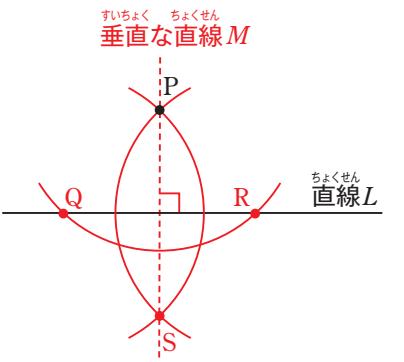


考え方

ひし形や二等辺三角形をうまく利用することを考えましょう。以前の連載を読んでいる方は、線分の垂直二等分線や、直線上の点を通るその直線の垂線を描いたことを思い出すとヒントになるでしょう。

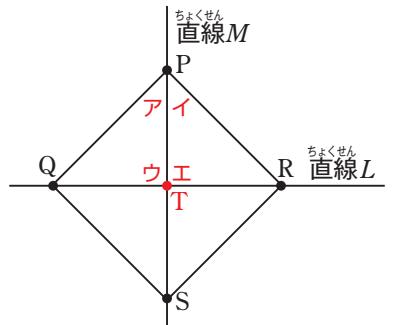
描き方

点Pを中心とする円を直線Lと2点で交わるように1つ描き、その2つの交点をQ、Rとします。次に、点Qを中心とする半径PQの円と点Rを中心とする半径PRの円を描き、それら2円の2交点のうちのPではない方の点をSとします。2点PとSを通る直線を描けば、その直線が点Pを通り直線Lと垂直な直線Mになります。



証明

PSとQRの交点をTとし、図のように角ア、イ、ウ、エをおきます。
 $\triangle PQS$ と $\triangle PRS$ において、図の描き方から、 $QS=QP=PR=RS$ なので、 $PQ=PR$ 、 $QS=RS$ 、 $PS=PS$ となります。したがって、「三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる」とから、 $\triangle PQS$ と $\triangle PRS$ はぴったり重なり、角ア=角イです。すると、 $\triangle PQT$ と $\triangle PRT$ において、 $PQ=PR$ 、 $PT=PT$ 、角ア=角イとなります。したがって、「二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる」とから、 $\triangle PQT$ と $\triangle PRT$ はぴったり重なります。よって、角ウ=角エなので、角ウと角エは直角です。つまり、直線Mは直線Lと垂直になっています。

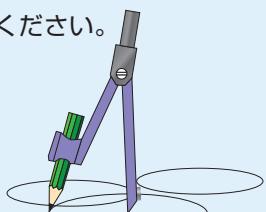


証明のための根本原理と図を描くときの注意

コンパスの使い方や三角形がどんなときにぴったり重なるかなど、図を描いたり証明したりするときに使う根本原理をまとめておきます。はじめてこの記事を読む人は参考にしてください。

<根本原理>

- 定規で、2点を通る直線が引ける。
- コンパスで、与えられた点を中心とし、与えられた半径の円が描ける。
- 三辺が互いに等しい三角形はぴったり重なる(3つの角も互いに等しい)。
- 二辺とその間の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる(残りの辺と角も互いに等しい)。
- 一边とその両端の角が互いに等しい三角形はぴったり重なる。
- 二等辺三角形の底角は等しい。逆に、二角が等しければ二等辺三角形である。
- 3点A、B、Cがこの順番で一直線上にあるならば、BAとBCのなす角は180度であり、逆に、BAとBCのなす角が180度ならば、3点A、B、Cがこの順番で一直線上にある。
- 対頂角は等しい。
- 2直線において、錯角の位置の角が等しければ、その2直線は平行である。逆に、2直線が平行であれば、その2直線に対する錯角の位置の角は等しい。
- 三角形の内角の和は180度である。
- 中心がOである円Oの円周上の点Tを通る直線は、半径OTと垂直であるならば接線である。



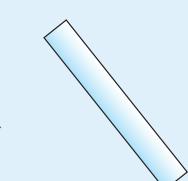
<図を描くときの注意>

- 定規は目盛がないものとします。直線を引くこと以外には使えません。

チャレンジ問題の解答は、4面をご覧ください。

三角形の中になるべく大きな円を描いてみよう

さて、いよいよ、三角形の中になるべく大きな円を描くことを考えてみることにしましょう。この記事の冒頭で書いたように、その円は三角形の三辺と内側から接している円になります。この円を描くことを、今回のチャレンジ問題にするので、頑張って考えてみてくださいね。



このコーナーは原則として、毎月第3週の木曜日に掲載します。